Metode Statistika (STK211)

Konsep Peluang
(Probability Concept)

Pendahuluan

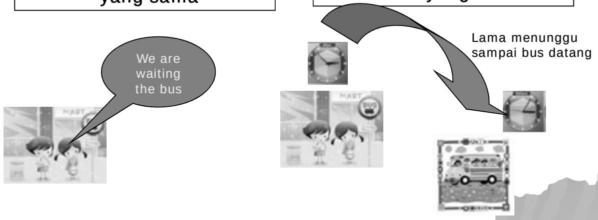
- Suatu fenomena dikatakan “acak” jika hasil dari suatu percobaan bersifat tidak pasti
- Fenomena “acak” sering mengikuti suatu pola tertentu
- Keteraturan “acak” dalam jangka panjang dapat didekati secara matematika
- Studi matematika mengenai “keacakan” → TEORI PELUANG – peluang merupakan suatu bentuk matematika dari sifat acak tersebut

Teori Peluang

- Ada dua tipe percobaan:

Deterministik :
Suatu percobaan yang menghasilkan output yang sama

Probabilistik :
Hasil dari percobaan bisa sembarang kemungkinan hasil yang ada



- Bagaimana menghitung banyaknya kemungkinan?
  - → perlu pengetahuan mengenai KAIDAH PENGGANDAAN, KOMBINASI, & PERMUTASI
  - → dapat dihitung peluang kejadian dari suatu percobaan

Ruang Contoh dan Kejadian

- **Ruang Contoh** adalah suatu gugus yang memuat semua hasil yang berbeda, yang mungkin terjadi dari suatu percobaan.
  - Notasi dari ruang contoh adalah sebagai berikut:
    - S = {e1, e2, …, en}, n = banyaknya hasil
    - n bisa terhingga atau tak terhingga

Contoh (1)

- Pelemparan sebutir dadu yang seimbang

→ Semua kemungkinan nilai yang muncul
S={1,2,3,4,5,6}

- Pelemparan coin setimbang

→ Semua kemungkinan nilai yang muncul
S={G, A}

Contoh (1) lanjutan…..

- Jenis Kelamin Bayi

Semua kemungkinan nilai yang muncul

S={Laki-laki,Perempuan}

- Pelemparan dua keping coin setimbang

Semua kemungkinan nilai yang muncul

S={GG, GA, AG, AA}

Ruang kejadian

adalah anak gugus dari ruang contoh, yang memiliki karakteristik tertentu.

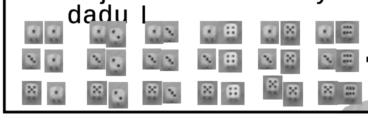
– Ruang kejadian biasanya dinotasikan dengan huruf kapital (A, B, …).

Contoh (2)

- Percobaan : pelemparan 2 coin setimbang
  Kejadian : munculnya sisi angka

A={GA, AG, AA}

- Percobaan : Pelemparan dua dadu sisi enam setimbang
  Kejadian : munculnya sisi ganjil pada dadu I



B = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 31, 32, …., 56}

Ruang Kejadian

Bagaimana cara menghitung banyaknya ruang contoh & kejadian?

Mengingat kembali apa itu Faktorial

- Jika n adalah bilangan bulat positif, maka
  $n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(3)(2)(1)$
  $n! = n\,(n-1)!$
- Kasus khusus 0! → 0! = 1
- Contoh :
  - 4! = 4.3.2.1 = 24
  - 5! = 5.4.3.2.1 = 5.4! = 120
  - 6! =6.5! = 720
  - 7! =7.6! =
  - 10! =…………….

Penggandaan (1)

– Pengandaan dapat digunakan jika setiap kemungkinan dibentuk dari komponen-komponen yang saling bebas.

N(S) = n1 x n2 x … x n1

– Contoh

Melempar 3 buah mata uang:

N(S) = 2 x 2 x 2 = 8

Melempar 2 buah dadu

N(S) = 6 x 6 = 36

Permutasi (2)

- Permutasi merupakan kejadian dimana SUSUNAN OBJEK yang terpilih DIPERHATIKAN.
- Misalkan memilih orang untuk membentuk kepengurusan suatu organisasi, dimana jika Si A terpilih menempati posisi ketua berbeda maknanya dengan Si A terpilih menempati posisi wakil ketua.

Lanjutan Permutasi (2)

- Misalkan terdapat 5 kandidat. Akan dibenuk susunan pengurus yang terdiri dari Ketua, Wakil Ketua, dan Bendahara :

5	4	3	
K	WK	B	= 60

→ Permutasi tingkat 3 dari 5 objek

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$$

Permutasi tingkat r dari n unsur/objek dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{nx(n-1)x(n-2)x...x0!}{(n-r)x(n-r-1)x...x0!}$$

Kombinasi (3)

- Kombinasi merupakan kejadian dimana SUSUNAN OBJEK yang terpilih TIDAK DIPERHATIKAN
- Misalkan memilih sejumlah orang untuk menempati suatu sejumlah kursi tempat duduk, dimana susunan tempat duduk tidak menjadi perhatian.

Lanjutan Kombinasi (3)

- Misalkan terdapat 5 orang yang akan dipilih 3 orang untuk masuk ke dalam tim cepat tepat

A B C
A B D
A B E
A C D
A C E
A D E
B C D
B C E
B D E
C D E

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5!}{3!2!}$$

→ Kombinasi 3 dai 5

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5.4.3!}{2!3!} = 10$$

Kombinasi tingkat r dari n unsur/objek dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{nx(n-1)x(n-2)x...x0!}{(n-r)x(n-r-1)x...x0!xr!}$$

Contoh (3)

- Dalam satu kepengurusan terdiri dari 5 laki-laki dan 4 perempuan. Jika akan dipilih satu tim yang terdiri dari 2 orang laki-laki dan seorang perempuan untuk mewakili dalam munas, ada berapa susunan tim yang mungkin terbentuk!

$$\binom{5}{2}\binom{4}{1} = 10x4 = 40$$

Definisi Peluang

Peluang Klasik

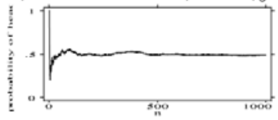
- Pendekatan klasik terhadap penentuan nilai peluang diberikan dengan menggunakan nilai frekuensi relatif.
- Andaikan dilakukan percobaan sebanyak N kali, dan kejadian A terjadi sebanyak $n \le N$ kali maka peluang A didefinisikan sebagai P(A) = n/N

Hukum Bilangan Besar

- $P(A) \approx m/n$

Jika suatu proses atau percobaan diulang sampai beberapa kali (DALAM JUMLAH BESAR = n), dan jika karakteristik A muncul m kali maka frekuensi relatif, m/n, dari A akan mendekati peluang dari A

» Around 1900, the English statistician Karl Pearson heroically tossed a coin 24,000 times and recorded 12,012 heads, giving a proportion of 0.5005.



Stata: graph twoway line prob n, yscale(r(0.0,1.0)) title("Probability of heads") ylabel(0(0.5)1)

Peluang Subyektif

- Berapa peluang hidup di mars?
- Berapa peluang dapat bertahan hidup dalam kondisi dingin?

Aksioma Peluang

- Beberapa kaidah sebaran peluang, yaitu:
  1. $0 \le p(xi) \le 1$, untuk i=1,2, …, n
  2. Jumlah peluang seluruh kejadian dalam ruang contoh adalah 1, $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$
  3. p(A1+A2+…+Am) = p(A1)+p(A2)+…+p(Am), jika A1, A2, …, Am merupakan kejadian-kejadian yang terpisah.

Contoh (4):

1. Sebuah dadu dilempar, maka ruang contohnya:
   S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, n(S)=6
   jika setiap sisi seimbang maka peluangnya
   p(1)=p(2)=….=p(6)=1/6
2. Sebuah kejadian yang diharapkan adalah sisi yang muncul kurang atau sama dengan empat maka ruang kejadiannya:
   A = {1, 2, 3, 4}, n(A) = 4
   Maka peluang kejadian A adalah:
   P(A) = 4/6 = 2/3

Lanjutan Contoh (4)

- Dalam satu kepengurusan terdiri dari 5 laki-laki dan 4 perempuan. Jika akan dipilih satu tim yang terdiri dari 2 orang laki-laki dan seorang perempuan untuk mewakili dalam munas, berapa peluang dari tim tersebut terbentuk?

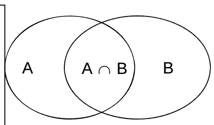
A = kejadian terbentuknya tim yang terdiri 2 laki-laki dan 1 perempuan

n(A) = $\binom{5}{2}\binom{4}{1} = 10x4 = 40$ n(S) = $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9.8.7.6!}{3!6!} = 84$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

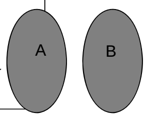
Hukum Penjumlahan dalam Peluang

Jika terdapat dua kejadian A dan B maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Jika A dan B saling lepas (mutually exclusive), $P(A \cap B) = 0$, sehingga

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



Hukum Perkalian dalam Peluang

Jika terdapat dua kejadian A dan B maka $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

Jika A dan B saling bebas, $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Kejadian Saling Bebas

- Kejadian saling bebas adalah kejadian-kejadian yang tidak saling mempengaruhi.
- Peluang dari dua buah kejadian yang saling bebas adalah:

  $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Contoh (5)

Peluang bayi berjenis kelamin laki-laki diketahui 0.6. Jika jenis kelamin anak pertama (A) dan kedua (B) saling bebas, berapa peluang jenis kelamin anak pertama dan anak kedua laki-laki?

$P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0.6*0.6 = 0.36$

Peluang Bersyarat

- Peluang bersyarat adalah peluang suatu kejadian (A) jika kejadian lain (B) diketahui telah terjadi.
- Peluang A bersyarat B dinotasikan $P(A|B)$, dimana:

  $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$
- Jika kejadian A dengan B saling bebas maka,

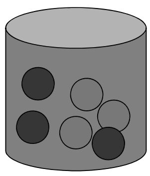
  $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$
  $= P(A).P(B)/P(B) = P(A)$

Contoh (5):

Dalam sebuah kotak berisi 2 bola merah dan 3 bola biru. Jika diambil dua buah bola tanpa pemulihan. Berapakah peluang bola kedua berwarna merah (A) jika pada pengambilan pertama diketahui berwarna biru (B).

A 2/4 II

B 3/5 I

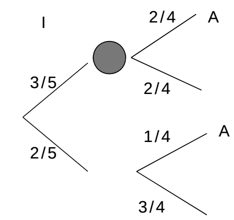


MIsalkan :
A= terambilnya bola merah pada pengambilan II

B = terambilnya bola biru pada pengambilan I

$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$

$= (3/5)(2/4)/(3/5)$
$= 2/4$



- Untuk mengerjakan kasus diatas, dapat juga dilakukan sebagai berikut:
- MIsalkan B = terambilnya bola biru pada pengambilan I
- A= terambilnya bola merah pada pengambilan II

Pertama Kedua	Merah (B^-)	Biru (B)	Total
Merah (A)	2/20	6/20	8/20
Biru (A^-)	6/20	6/20	12/20
Total	8/20	12/20	20/20

Perhatikan tabel kemungkinan
P(A|B)=(6/20)/(12/20)=1/2

P(A $\cap$ B) = P(A).P(B)

Teorema Bayes

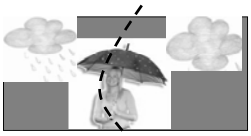
Contoh (6)

Kota Bogor disebut kota hujan karena peluang terjadinya hujan (H) cukup besar yaitu sebesar 0.6. Hal ini menyebabkan para mahasiswa harus siap-siap dengan membawa payung (P). Peluang seorang mahasiswa membawa payung jika hari hujan 0.8, sedangkan jika tidak hujan 0.4.

Berapa peluang hari akan hujan jika diketahui mahasiswa membawa payung?

Misalkan :
H = Bogor hujan,
P = mahasiswa membawa payung
P(H) = 0.6 P(TH) = 1-0.6=0.4 P(P|H) = 0.8
P(P|TH) = 0.4

Ditanya : P(H|P)
Jawab :



Sesuai hukum perkalian peluang

$$P(H/P)=\frac{P(H\cap P)}{P(P)}=\frac{P(H\cap P)}{P(H\cap P)+P(TH\cap P)}=\frac{P(H)P(P/H)}{P(H)P(P/H)+P(TH)P(P/TH)}$$

$$P(H/P)=\frac{0.6x0.8}{0.6x0.8+0.4x0.4}=\frac{0.48}{0.48+0.16}=\frac{0.48}{0.64}$$ → Teorema Bayes

Teorema Bayes

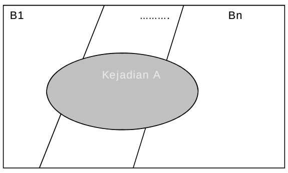
- Suatu gugus universum disekat menjadi beberapa anak gugus B1, B2, …, Bn dan A suatu kejadian pada U dengan p(B)≠0 maka,

  P(A) = Σ P(Bi)P(A|Bi)

- Peluang B_k bersyarat A, dapat dihitung sebagai berikut:

  P(B_k|A) = P(B_k∩A)/ P(A)

- Perhatikan diagram berikut:
  - Ruang contoh dipecah menjadi kejadian B1, B2,…,Bn saling terpisah
  - Disamping itu ada kejadian A, yang dapat terjadi pada kejadian B1, B2,…,Bn. Dengan demikian, A=(A∩B1) + (A∩B2) + …. + (A∩Bn)
  - Peluang kejadian A adalah: P(A)=P(A∩B1) + P(A∩B2) + …. + P(A∩Bn)
  - Dengan memanfaatkan sifat peluang bersyarat, diperoleh peluang Bk bersyarat A adalah:



$$P(Bk|A) = P(Bk)P(A|Bk) / \Sigma P(Bi)P(A|Bi)$$

quiz

Tiga kantung berisi kelereng sebagai berikut:

Kantung 1: 3 Merah, 7 Putih

Kantung 2: 5 Merah, 5 Putih

Kantung 3: 6 Merah, 4 Putih

Sebuah kelereng diambil secara acak dari kantung 1. Jika kelereng ini merah, sebuah kelereng diambil dari kantung 2; jika kelereng ini putih, sebuah kelereng diambil dari kantung 3.

(a) Berapa peluang terambilnya kelereng merah pada ambilan yang ke dua?

(b) Misalkan dari ambilan kedua diperoleh kelereng merah. Berapa peluang(bersyarat) bahwa kelereng pertama yang terambil juga merah?